

Matematica

Dispense di preparazione al primo anno



IIS Luigi Castiglioni, Limbiate

Dipartimento di Matematica

Indice

Introduzione	iii
1 I numeri naturali	1
1.1 Che cosa sono i numeri naturali	1
1.2 Le quattro operazioni in $\mathbb{N}$	1
1.2.1 Addizione e sottrazione	1
1.2.2 Moltiplicazione e divisione	1
2 La divisione scritta senza calcolatrice	5
2.1 L'algoritmo della divisione	5
2.2 Divisione con i numeri decimali	6
3 Divisibilità, MCD e mcm	10
3.1 Divisibilità e criteri	10
3.2 Numeri primi e fattorizzazione	10
3.3 MCD con fattorizzazione e algoritmo di Euclide	11
3.4 mcm con fattorizzazione	11
4 Le frazioni	14
4.1 Definizioni e tipi	14
4.2 Le quattro operazioni	14
4.3 Frazioni e numeri decimali	15
5 Espressioni numeriche	20
5.1 Priorità delle operazioni	20
6 Le potenze	23
6.1 Definizione e casi particolari	23
7 Proporzioni e percentuali	26
7.1 Che cosa è una proporzione	26
7.1.1 Proporzioni continue	26
7.1.2 Proprietà derivate	27
7.2 Percentuali	27
8 Proporzionalità diretta e inversa	31
8.1 Proporzionalità diretta	31
8.2 Proporzionalità inversa	32
8.3 Come distinguere i due tipi	32

8.4	La regola del tre semplice	32
8.5	La regola del tre composta	33
8.6	Il grafico cartesiano	33
8.7	Grafico della proporzionalità diretta	34
8.8	Grafico della proporzionalità inversa	35
9	Geometria elementare: rette, angoli, figure piane	39
9.1	Punti, rette e piani	39
9.2	Gli angoli	40
9.3	Il perimetro	40
9.4	L'area	41
	Formulario di riferimento	45

Introduzione

Queste dispense raccolgono i **requisiti minimi di matematica** che ogni studente dovrebbe possedere all'inizio del primo anno presso l'IIS «Luigi Castiglioni» di Limbiate.

Non si tratta di un corso completo, né di un libro di testo: sono uno strumento di **preparazione e autoverifica**, pensato per chi vuole arrivare a settembre con basi solide e affrontare con serenità le prime settimane di scuola.

Gli argomenti trattati — dall'aritmetica dei numeri naturali alle proporzioni, dalle frazioni alle potenze, fino agli elementi di geometria piana — corrispondono ai contenuti della scuola secondaria di primo grado che verranno dati per acquisiti fin dalle prime lezioni.

Come usare queste dispense. Ogni capitolo presenta la teoria in modo sintetico, con definizioni precise ed esempi risolti passo per passo. Seguono esercizi di difficoltà crescente. Il consiglio è di leggere la teoria, studiare gli esempi e poi svolgere gli esercizi sul quaderno mostrando tutti i passaggi: in matematica il procedimento è importante quanto il risultato.

Nota per gli studenti con DSA. Per gli studenti con disturbi specifici dell'apprendimento sono previste indicazioni dedicate all'interno di ciascun capitolo ove pertinente. In generale, è sempre consentito l'uso della calcolatrice per le operazioni di supporto, salvo dove diversamente specificato.

Esercizi consigliati. Gli esercizi contrassegnati con il simbolo ★ sono **fortemente consigliati**: costituiscono il nucleo minimo indispensabile per una solida preparazione. Chi ha poco tempo a disposizione può concentrarsi su questi.

*Dipartimento di Matematica
IIS «Luigi Castiglioni», Limbiate*

I numeri naturali

1.1 Che cosa sono i numeri naturali

I **numeri naturali** sono i numeri del conteggio: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... L'insieme di tutti i numeri naturali si indica con $\mathbb{N}$. Ha due proprietà fondamentali: è **infinito** (contiene infiniti elementi) ed è **ordinato** (dati $a, b \in \mathbb{N}$, vale esattamente una tra $a < b$, $a = b$, $a > b$).

Si possono rappresentare su una **retta orientata**: si fissa un punto di origine (0) e un'unità di misura; i numeri si dispongono a distanze uguali verso destra.

Estendendo $\mathbb{N}$ con i numeri negativi si ottengono gli **interi** $\mathbb{Z}$; aggiungendo tutte le frazioni si ottengono i **razionali** $\mathbb{Q}$; aggiungendo i numeri irrazionali (come $\sqrt{2}$ e π) si ottengono i **reali** $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.2 Le quattro operazioni in $\mathbb{N}$

1.2.1 Addizione e sottrazione

L'**addizione** $a + b$ (somma) è chiusa in $\mathbb{N}$: la somma di due naturali è sempre un naturale. La **sottrazione** $a - b$ (differenza) appartiene a $\mathbb{N}$ *solo se* $a \geq b$.

Proprietà dell'addizione: commutativa ($a + b = b + a$), associativa ($(a + b) + c = a + (b + c)$), elemento neutro lo zero ($a + 0 = a$).

1.2.2 Moltiplicazione e divisione

La **moltiplicazione** $a \cdot b$ (prodotto) è chiusa in $\mathbb{N}$. Proprietà: commutativa, associativa, elemento neutro l'uno ($a \cdot 1 = a$), elemento assorbente lo zero ($a \cdot 0 = 0$), distributiva rispetto alla somma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

La **divisione** $a \div b$ dà sempre un quoziente intero q e un resto r con $0 \leq r < b$: $a = b \cdot q + r$. Se $r = 0$ la divisione è **esatta** e si scrive $b \mid a$ (« b divide a »). La divisione per zero non è definita.

Proprietà — riepilogo

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Elem. assorbente	—	$a \cdot 0 = 0$ (solo per $\times$)
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Uso della distributiva per calcolo rapido

$$47 \times 9 = 47 \times (10 - 1) = 47 \times 10 - 47 \times 1 = 470 - 47 = 423.$$

$$36 \times 11 = 36 \times (10 + 1) = 360 + 36 = 396.$$

$$99 \times 8 = (100 - 1) \times 8 = 800 - 8 = 792.$$

$$125 \times 8: \text{poichè } 125 = 1000 \div 8 \text{ e } 8 \times 125 = 1000, \text{ si ottiene } 125 \times 8 = 1000.$$

Esercizi — Capitolo 1: Numeri naturali

Gli esercizi contrassegnati con sono **fortemente consigliati**.

1. ★ Calcola senza calcolatrice. Mostra la strategia usata.

- 1) $37 \times 8 + 37 \times 2$
- 2) $56 \times 13 - 56 \times 3$
- 3) $124 \times 7 + 124 \times 3$
- 4) $45 \times 19 + 45$
- 5) $63 \times 101 - 63$
- 6) $84 \times 99 + 84$
- 7) $17 \times 98 + 17 \times 2$
- 8) 35×28 (Suggerimento: $35 \times 4 \times 7$)
- 9) 125×32 (Suggerimento: $125 \times 8 \times 4$)
- 10) 50×46

2. Vero o Falso? Per ogni affermazione: se vera, dimostrarla; se falsa, dai un controesempio.

- 1) La somma di due numeri pari è sempre pari.
- 2) Il prodotto di due dispari è sempre dispari.
- 3) La differenza di due multipli di 5 è sempre multiplo di 5.
- 4) La somma di tre numeri consecutivi è sempre divisibile per 3.
- 5) La somma di quattro numeri consecutivi è sempre pari.
- 6) Il quadrato di un numero dispari è sempre dispari.

- 7) Il prodotto di tre numeri consecutivi è sempre divisibile per 6.
- 8) La somma di un pari e un dispari è sempre dispari.
3. ★ (*Problema*) Una cooperativa agricola ha tre soci: il primo possiede 3 600 alberi, il secondo il triplo del primo, il terzo 1 200 alberi in meno del secondo.
- 1) Quanti alberi ha in totale la cooperativa?
 - 2) Se ogni albero produce in media 18 kg di frutta, quanti kg produce la cooperativa?
 - 3) La frutta viene venduta a €0,85 al kg. Quanti euro incassa la cooperativa?
 - 4) I costi di raccolta sono €0,20 per kg. Qual è l'utile netto?
4. ★ (*Problema*) Un magazzino ha 1 440 cassette di pomodori da caricare su camion da 64 cassette cadauno.
- 1) Quanti camion servono?
 - 2) Quante cassette porta l'ultimo camion?
 - 3) Se ogni cassetta pesa 15 kg, quante tonnellate totali?
 - 4) Il trasporto costa €35 a viaggio. Costo totale?
5. (*Problema*) Un trattore percorre 240 km con un pieno di 20 litri. Il gasolio costa €1,40 al litro.
- 1) Quanti km percorre per litro?
 - 2) Quanti litri servono per 660 km?
 - 3) Quanti pieni interi servono per 660 km?
 - 4) Qual è la spesa totale in carburante per 660 km?
 - 5) Se il prezzo del gasolio aumenta del 10%, quanto si spende in più per 660 km?
6. (*Problema — calendario*) Un'azienda agricola lavora 6 giorni su 7. Inizia la semina il 1° marzo. Quanti giorni lavorativi ci sono fino al 31 maggio incluso? (*Suggerimento: calcola i giorni totali del periodo, poi toglie le domeniche.*)
7. Stabilisci, senza dividere, se i seguenti numeri sono multipli di 3, di 4, di 6:
- 156, 2 340, 7 812, 13 440, 99 996, 100 008
8. (*Problema — griglia*) Un campo rettangolare viene diviso in parcelle rettangolari identiche di $8\text{ m} \times 12\text{ m}$. Il campo misura $96\text{ m} \times 144\text{ m}$.
- 1) Quante parcelle ci sono in ogni riga? In ogni colonna?
 - 2) Quante parcelle in totale?
 - 3) Se ogni parcella viene piantumata con 15 alberi, quanti alberi in tutto?

Esercizi

1. Tre numeri naturali consecutivi hanno somma 213. Trovali senza usare le equazioni. (*Suggerimento: la somma di tre consecutivi è sempre 3 volte il numero centrale.*)
2. Il prodotto di due numeri naturali è 600 e il loro quoziente è 6. Trovali.

3. (*Problema*) Un muro di 3 120 mattoni deve essere costruito da due muratori. Il primo posa 180 mattoni all'ora, il secondo 140.
- 1) Lavorando insieme, in quante ore finiscono?
 - 2) Se il primo lavora 3 ore da solo, poi arriva il secondo: quante ore ancora?
4. Dimostra che il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è sempre divisibile per 6.

La divisione scritta senza calcolatrice

Nota per gli studenti con DSA

Gli studenti con **DSA** (dislessia, discalculia ecc.) possono utilizzare la calcolatrice per le *moltiplicazioni e sottrazioni intermedie* dell'algoritmo, ma devono comunque eseguire l'algoritmo di divisione passo per passo: trovare la cifra del quoziente, moltiplicare (con calcolatrice se necessario), sottrarre, portare giù. **La divisione diretta non è ammessa**: il processo di stima e verifica va svolto per intero.

2.1 L'algoritmo della divisione

Dividere a per b significa trovare quante volte b entra in a . Il risultato è il **quoziente** q e l'**avanzo** è il **resto** r :

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Se $r = 0$ la divisione è **esatta**. Questa relazione serve come **verifica**.

Algoritmo — sequenza da ripetere a ogni passo

1. **Prendi** le prime cifre del dividendo finché il numero è $\geq$ divisore.
2. **Stima** quante volte il divisore entra in quel numero: guarda le prime cifre e dividi mentalmente.
3. **Moltiplica** divisore $\times$ cifra stimata e **confronta**: se il prodotto supera il dividendo parziale, diminuisci di 1; se il resto risultante è $\geq$ divisore, aumenta di 1.
4. **Sottrai** e **porta giù** la cifra successiva del dividendo.
5. Ripeti fino all'ultima cifra. L'ultimo resto è r .
6. **Verifica**: $b \times q + r = a$. ✓

Nota DSA: i passi 3 e 4 (moltiplicazione e sottrazione) possono essere eseguiti con la calcolatrice.

Il resto è sempre minore del divisore

Se il tuo resto finale è $\geq$ divisore, hai sbagliato: il quoziente va aumentato. Se durante la divisione il dividendo parziale è minore del divisore, scrivi 0 nel quoziente e porta giù la cifra successiva: non si salta mai una posizione.

$$5847 \div 7$$

$5 < 7$: prendo 58. Stima: $58 \div 7 \approx 8$. $7 \times 8 = 56 \leq 58$, resto = 2. Scrivo 8.

Porto giù 4 $\rightarrow 24$. $7 \times 3 = 21 \leq 24$, resto = 3. Scrivo 3.

Porto giù 7 $\rightarrow 37$. $7 \times 5 = 35 \leq 37$, resto = 2. Scrivo 5.

$q = 835$, $r = 2$. **Verifica:** $7 \times 835 + 2 = 5847$. ✓

$$7462 \div 23$$

Prendo 74. Stima: $7 \div 2 \approx 3$. $23 \times 3 = 69 \leq 74$, $23 \times 4 = 92 > 74$. Resto = 5. Scrivo 3.

Porto giù 6 $\rightarrow 56$. $23 \times 2 = 46 \leq 56$, $23 \times 3 = 69 > 56$. Resto = 10. Scrivo 2.

Porto giù 2 $\rightarrow 102$. $23 \times 4 = 92 \leq 102$, $23 \times 5 = 115 > 102$. Resto = 10. Scrivo 4.

$q = 324$, $r = 10$. **Verifica:** $23 \times 324 + 10 = 7452 + 10 = 7462$. ✓

2.2 Divisione con i numeri decimali

Quando la divisione non è esatta, invece di fermarsi al resto si continua aggiungendo cifre decimali al quoziente.

Le tre regole per i decimali

- 1. Resto non zero $\rightarrow$ risultato decimale.** Quando non ci sono più cifre da portare giù, scrivi la **virgola** nel quoziente e aggiungi uno **zero** al resto; continua il procedimento.
- 2. Dividendo decimale, divisore intero.** Ignora la virgola ed esegui la divisione come tra interi. Nel quoziente rimetti la virgola in modo che abbia tante cifre decimali quante ne ha il dividendo (sottratte quelle del divisore, qui zero).
- 3. Divisore decimale** (o entrambi decimali). Moltiplica dividendo e divisore per la stessa potenza di 10 in modo da rendere il divisore un numero intero, poi procedi normalmente. Scrivi sempre la trasformazione applicata.

$$7 \div 4 \text{ — risultato decimale}$$

$7 \div 4$: 4 entra 1 volta, resto 3. Scrivo la virgola; aggiungo zero $\rightarrow 30$: 4 entra 7 volte, resto 2. Aggiungo zero $\rightarrow 20$: 4 entra 5 volte, resto 0.

$7 \div 4 = 1,75$. **Verifica:** $4 \times 1,75 = 7$. ✓

18,48 ÷ 7 — dividendo decimale

Divido $1848 \div 7 = 264$. Il dividendo ha 2 decimali, il divisore 0: sposto la virgola di 2 posti a sinistra nel quoziente $\Rightarrow 2,64$.

Verifica: $7 \times 2,64 = 18,48$. ✓

15 ÷ 0,4 — divisore decimale

Moltiplico entrambi per 10: $150 \div 4 = 37,5$.

Verifica: $0,4 \times 37,5 = 15$. ✓

3,78 ÷ 0,63 — entrambi decimali

Moltiplico entrambi per 100: $378 \div 63$. Stima: $37 \div 6 \approx 6$; $63 \times 6 = 378$, resto 0.

$3,78 \div 0,63 = 6$. Verifica: $0,63 \times 6 = 3,78$. ✓

Esercizi — La divisione scritta

Gli esercizi contrassegnati con **sono fortemente consigliati**.

- 1. ★ Intero ÷ intero — risultato decimale.** Aggiungi la virgola al quoziente quando il resto non è zero.

- 1) $7 \div 4$ 2) $5 \div 8$ 3) $13 \div 5$ 4) $11 \div 4$
 2) $3 \div 8$ 6) $17 \div 5$ 7) $9 \div 4$ 8) $7 \div 8$
 3) $23 \div 5$ 10) $19 \div 4$ 11) $63 \div 8$ 12) $47 \div 5$
 4) $9 \div 8$ 14) $27 \div 4$ 15) $31 \div 5$ 16) $53 \div 8$

- 2. Dividendo decimale ÷ divisore intero.** Ignora la virgola, dividi, poi rimettila nel quoziente.

- 1) $3,6 \div 4$ 2) $7,5 \div 3$ 3) $12,8 \div 4$ 4) $15,6 \div 6$
 2) $4,32 \div 8$ 6) $7,56 \div 9$ 7) $18,48 \div 7$ 8) $25,2 \div 6$
 3) $0,96 \div 8$ 10) $3,045 \div 5$ 11) $14,4 \div 6$ 12) $8,64 \div 4$
 4) $0,504 \div 7$ 14) $12,96 \div 9$ 15) $7,035 \div 5$ 16) $3,276 \div 6$

- 3. Divisore decimale.** Scrivi la trasformazione ($\times 10$, $\times 100$, ...) prima di calcolare.

- 1) $15 \div 0,3$ ($\times 10$: $150 \div 3$)
 2) $8 \div 0,4$
 3) $36 \div 0,6$
 4) $12 \div 1,5$
 5) $45 \div 0,9$
 6) $7,2 \div 0,8$
 7) $3,6 \div 0,04$
 8) $0,48 \div 0,06$
 9) $2,4 \div 0,12$
 10) $0,35 \div 0,07$

- 11) $1,44 \div 1,2$
- 12) $0,126 \div 0,14$
- 13) $54 \div 0,09$
- 14) $0,072 \div 0,8$
- 15) $4,8 \div 0,032$
- 16) $0,0056 \div 0,7$

4. Entrambi decimali. Moltiplica per eliminare tutti i decimali dal divisore.

- 1) $6,3 \div 0,7$ 2) $4,8 \div 1,6$ 3) $7,5 \div 2,5$ 4) $0,36 \div 0,9$
- 2) $5,04 \div 1,8$ 6) $12,6 \div 4,2$ 7) $3,78 \div 0,63$ 8) $15,6 \div 2,4$
- 3) $0,175 \div 0,25$ 10) $9,45 \div 3,5$ 11) $0,432 \div 0,48$ 12) $1,764 \div 1,4$
- 4) $0,0084 \div 0,12$ 14) $3,315 \div 2,5$ 15) $0,288 \div 0,36$ 16) $7,56 \div 0,84$

5. Espressioni con divisioni e decimali. Rispetta l'ordine delle operazioni.

- 1) $3,6 \div 4 + 7,5 \div 3$
- 2) $12,8 \div 4 - 0,48 \div 0,06$
- 3) $(7,2 \div 0,8) \times (1,44 \div 1,2)$
- 4) $15 \div 0,3 - 3,6 \div 0,04$
- 5) $\frac{5,04 \div 1,8}{0,36 \div 0,9}$
- 6) $(6,3 \div 0,7)^2 - (2,4 \div 0,12) \div 5$

6. Problemi.

- 1) Un trattore percorre 38,4 km con 3,2 L di gasolio. Quanti km percorre per litro?
- 2) Si versano 4,32 L di fertilizzante in 8 contenitori uguali. Quanti litri in ciascuno?
- 3) Un cavo di 12,6 m viene tagliato in pezzi da 1,4 m. Quanti pezzi interi? Avanzo in cm?
- 4) Il perimetro di un campo esagonale regolare è 47,4 m. Quanto misura ogni lato?
- 5) Una confezione da 0,75 kg di sementi basta per 0,05 ha. Quante confezioni servono per 1,8 ha?
- 6) Un recipiente contiene 5,04 L di soluzione al 18% di principio attivo. Quanti grammi di principio attivo contiene, sapendo che 1 L pesa 0,9 kg?

Esercizi

1. (Trova il divisore) Sai che $a \div b$ dà quoziente q e resto r . Trova b usando $b = (a - r) \div q$.

- 1) $a = 92, q = 9, r = 2$
- 2) $a = 167, q = 8, r = 7$
- 3) $a = 509, q = 15, r = 14$

2. (Calcolo rapido) Trova quoziente e resto senza la divisione lunga.

- 1) $10\,000 \div 99$ (*Suggerimento: $99 \times 101 = ?$*)
- 2) $888\,888 \div 8$
- 3) $1 \div 7$: calcola le prime 6 cifre decimali e nota il periodo.

Divisibilità, MCD e mcm

3.1 Divisibilità e criteri

Divisibilità

a è **divisibile** per b (scritto $b \mid a$) se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $a = b \cdot k$.

Criteri di divisibilità

- **Per 2:** ultima cifra pari.
- **Per 3:** somma delle cifre divisibile per 3.
- **Per 4:** ultime due cifre divisibili per 4.
- **Per 5:** ultima cifra 0 o 5.
- **Per 6:** divisibile per 2 e per 3.
- **Per 8:** ultime tre cifre divisibili per 8.
- **Per 9:** somma delle cifre divisibile per 9.
- **Per 10:** ultima cifra 0.
- **Per 11:** differenza tra somma cifre in posizione dispari e pari divisibile per 11.

3.2 Numeri primi e fattorizzazione

Un numero $p > 1$ è **primo** se i suoi soli divisori sono 1 e p . Il **Teorema fondamentale dell'aritmetica** garantisce che ogni $n > 1$ si scrive in modo unico come prodotto di primi: $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$. Si fattorizza dividendo ripetutamente per il più piccolo primo che divide il numero.

Fattorizzazione di 2 520

$$2520 = 2 \cdot 1260 = 2^2 \cdot 630 = 2^3 \cdot 315 = 2^3 \cdot 3 \cdot 105 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 35 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

3.3 MCD con fattorizzazione e algoritmo di Euclide

Metodo fattorizzazione: fattori *comuni*, esponente *minore*.

MCD con fattorizzazione: MCD(360, 504)

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \quad 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Fattori comuni: 2 ed 3. Esponenti minimi: 2^3 e 3^2 . $\Rightarrow \text{MCD}(360, 504) = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

Algoritmo di Euclide (alternativa rapida per due numeri). La notazione $a \bmod b$ indica il **resto** della divisione di a per b . L'algoritmo sfrutta la proprietà $\text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(b, a \bmod b)$: il MCD non cambia se si sostituisce a con il resto di $a \div b$. Si ripete finché il resto è zero: l'ultimo divisore non nullo è il MCD.

Euclide su MCD(1 071, 462)

$$1071 = 2 \times 462 + 147; \quad 462 = 3 \times 147 + 21; \quad 147 = 7 \times 21 + 0. \Rightarrow \text{MCD} = 21.$$

3.4 mcm con fattorizzazione

Metodo fattorizzazione: *tutti* i fattori, esponente *maggiore*.

Relazione fondamentale

$$\text{MCD}(a, b) \times \text{mcm}(a, b) = a \times b \quad (\text{vale per due numeri}).$$

Perché è vera? Quando moltiplichiamo $a \times b$ stiamo mettendo insieme tutti i fattori primi di a e tutti quelli di b . Il MCD prende i fattori comuni con l'esponente *minore*, il mcm prende tutti i fattori con l'esponente *maggiore*: insieme ridistribuiscono esattamente gli stessi fattori di $a \times b$, perché per ogni fattore primo l'esponente minore più l'esponente maggiore fa sempre la somma dei due esponenti.

Esempio: $a = 12 = 2^2 \cdot 3, \quad b = 18 = 2 \cdot 3^2$.

$$a \times b = 2^3 \cdot 3^3. \quad \text{MCD} = 2^1 \cdot 3^1 = 6. \quad \text{mcm} = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

$$\text{MCD} \times \text{mcm} = 2^{1+2} \cdot 3^{1+2} = 2^3 \cdot 3^3 = 216 = 12 \times 18. \quad \checkmark$$

Esercizi — Capitolo 2: Divisibilità, MCD, mcm

Gli esercizi contrassegnati con **sono fortemente consigliati**.

1. ★ Calcola MCD e mcm di ogni coppia; verifica con la relazione $\text{MCD} \times \text{mcm} = a \times b$.

1) (180; 252) b) (360; 504) c) (1 260; 840)

2) (2 310; 1 155) e) (504; 756) f) (900; 1 080)

- 3) (1 764; 2 646) h) (3 528; 1 764) i) (5 040; 3 360)
 4) (6 300; 4 200) k) (7 560; 5 040) l) (12 600; 8 400)
2. Usa l'algoritmo di Euclide per calcolare il MCD; poi ricava il mcm dalla relazione.
- 1) MCD(391, 299) b) MCD(528, 336) c) MCD(1 071, 462)
 2) MCD(1 547, 703) e) MCD(2 346, 874) f) MCD(3 757, 2 173)
 3) MCD(4 181, 2 584) h) MCD(6 765, 4 181) i) MCD(10 946, 6 765)
3. ★ Per ogni coppia, scrivi le fattorizzazioni, poi calcola MCD, mcm e verifica.
- 1) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$
 2) $a = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$, $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
 3) $a = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$, $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$
 4) $a = 2^5 \cdot 5^2$, $b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $c = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$
4. (Problema) Tre fertilizzanti devono essere somministrati rispettivamente ogni 12, 18 e 30 giorni. Se oggi vengono somministrati tutti insieme:
- 1) Dopo quanti giorni coincidono di nuovo tutti e tre?
 2) Quante somministrazioni esegue ciascun fertilizzante in quel periodo?
 3) Se si parte il 1° settembre, in che data coincidono di nuovo?
 4) Quante coincidenze di tutti e tre ci sono in un anno (365 giorni)?
5. (Problema) Un campo rettangolare di $84 \text{ m} \times 56 \text{ m}$ deve essere diviso in lotti quadrati uguali della massima dimensione possibile.
- 1) Qual è il lato del lotto?
 2) Quanti lotti ci sono in totale?
 3) Se ogni lotto costa € 450, qual è il valore totale del campo?
 4) Un secondo campo di $126 \text{ m} \times 84 \text{ m}$ viene diviso con lo stesso criterio. Lato del lotto? Numero di lotti?
6. (Problema) Ho 126 rose, 84 tulipani e 210 girasoli da distribuire in mazzi tutti identici, senza avanzzi.
- 1) Quanti mazzi al massimo?
 2) Quanti fiori di ogni tipo in ogni mazzo?
 3) Se voglio mazzi con meno di 10 fiori in totale, quanti mazzi posso fare?
7. (Problema) Due operai lavorano in turni di 8 e 12 ore. Iniziano insieme alle 6:00.
- 1) Quando si ritrovano per la prima volta al cambio turno?
 2) Quanti cambi ha fatto ciascuno fino a quel momento?
 3) E la quarta volta che coincidono?
8. (Problema) Tre treni partono ogni 24, 36 e 40 minuti. Alle 8:00 partono tutti insieme.
- 1) Alle 10:00 quali treni stanno partendo?
 2) A che ora partono tutti e tre insieme per la seconda volta?
 3) Quante partenze totali ha effettuato ciascun treno dall'8:00 alla prima coincidenza?

9. (*Problema — piastrelle*) Un pavimento rettangolare di $360 \text{ cm} \times 504 \text{ cm}$ deve essere coperto da piastrelle quadrate identiche, della massima dimensione possibile.
- 1) Lato della piastrella?
 - 2) Numero totale di piastrelle?
 - 3) Se ogni piastrella costa €3,50, costo totale?
10. Completa la tabella calcolando MCD e mcm per ogni riga.

a	b	MCD(a, b)	mcm(a, b)
24	36		
45	60		
84	126		
144	216		

Verifica in ogni riga che $\text{MCD} \times \text{mcm} = a \times b$.

Esercizi

1. Siano $a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ e $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$. Calcola $\text{MCD}(a, b)$ e $\text{mcm}(a, b)$; verifica con la relazione $\text{MCD} \times \text{mcm} = a \times b$.
2. (*Semafori*) Tre semafori lampeggiano ogni 20, 30 e 45 secondi. Alle 8:00:00 lampeggiano tutti insieme.
 - 1) Ogni quanti secondi lampeggiano tutti e tre insieme?
 - 2) Quante volte nell'arco di un'ora?
 - 3) Alle 8:05:00, quali stanno lampeggiando?
3. Trova tutti i naturali n tali che $\text{MCD}(n, 12) = 4$ e $\text{mcm}(n, 12) = 60$.
4. (*Problema*) Un coltivatore deve tagliare tre rotoli di filo di 120 m, 168 m e 210 m in pezzi tutti uguali della massima lunghezza possibile. Lunghezza di ogni pezzo? Quanti pezzi in totale?

Le frazioni

4.1 Definizioni e tipi

Una **frazione** $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) rappresenta a parti di un intero diviso in b parti uguali. a è il **numeratore**, b il **denominatore**. In queste dispense lavoriamo con a, b numeri naturali con $b > 0$.

Tipi di frazioni

- **Propria:** $a < b$ — il valore è compreso tra 0 e 1. Es. $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}$.
- **Impropria:** $a \geq b$ — il valore è maggiore o uguale a 1. Es. $\frac{7}{4}, \frac{9}{3}$.
- **Apparente:** $b \mid a$ — la divisione è esatta, il risultato è un intero. Es. $\frac{6}{3} = 2$.
- **Equivalenti:** $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ per ogni $k \neq 0$ — hanno lo stesso valore numerico. Es. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$.

Riduzione ai minimi termini: si divide numeratore e denominatore per il loro MCD. La frazione ottenuta è equivalente all'originale ed è nella forma più semplice.

Confronto tra frazioni: per stabilire quale delle due è maggiore si riducono allo stesso denominatore (uguale al mcm dei denominatori), oppure si usa il **prodotto in croce**: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff a \cdot d < b \cdot c$ (con $b, d > 0$).

4.2 Le quattro operazioni

Addizione e sottrazione. Si riducono le frazioni allo stesso denominatore (conviene usare il *minimo* comune multiplo), poi si sommano o sottraggono i numeratori:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{mcm}}{b} + c \cdot \frac{\text{mcm}}{d}}{\text{mcm}(b, d)}.$$

Es. $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$: $\text{mcm}(4, 3) = 12$, quindi $\frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$.

Moltiplicazione. Si moltiplicano numeratori tra loro e denominatori tra loro. Prima di moltiplicare conviene *semplificare in croce* (dividere un numeratore e un denominatore per un loro fattore comune):

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Es. $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_1} \times \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{9}_3} = \frac{2}{3}.$

Divisione. Dividere per una frazione equivale a *moltiplicare per il suo reciproco* (si inverte la seconda frazione):

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Es. $\frac{5}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$

Gli errori più frequenti

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$: i denominatori **non** si sommano. Corretto: $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$
- Nella divisione si inverte **la seconda** frazione, non la prima.
- Il risultato va sempre semplificato ai minimi termini.

4.3 Frazioni e numeri decimali

Ogni frazione $\frac{a}{b}$ (con $b \neq 0$) ha una rappresentazione decimale che è sempre **finita** oppure **periodica**:

- **Finita**: il denominatore ridotto ai minimi termini ha solo fattori 2 e 5. Es. $\frac{3}{8} = 0,375$ (poiché $8 = 2^3$).
- **Periodica**: il denominatore contiene altri fattori primi. Es. $\frac{5}{12} = 0,41\overline{6}$ (poiché $12 = 2^2 \cdot 3$).

Da decimale a frazione — periodico puro. Il periodo comincia subito dopo la virgola (es. $0,\overline{27} = 0,272727 \dots$).

Metodo — tre passi:

1. Chiama x il numero decimale periodico.
2. Moltiplica x per 10, 100, 1 000... tante volte quante sono le **cifre del periodo**, in modo che la parte decimale si ripeta uguale. Ottieni così un'equazione in cui sottraendo x il periodo si cancella.
3. Risolvi l'equazione e semplifica la frazione.

$$0,\overline{3} = 0,3333 \dots$$

Il periodo è **una** cifra (3), quindi moltiplico per 10:

$$x = 0,3333 \dots \Rightarrow 10x = 3,3333 \dots$$

Sottraggo x da $10x$: $10x - x = 3,333 \dots - 0,333 \dots = 3$

$$9x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$0,\overline{27} = 0,272727 \dots$$

Il periodo è **due** cifre (27), quindi moltiplico per 100:

$$x = 0,2727 \dots \Rightarrow 100x = 27,2727 \dots$$

$$100x - x = 27,2727 \dots - 0,2727 \dots = 27$$

$$99x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Da decimale a frazione — periodico misto.

Guarda il numero e conta:

- quante cifre ci sono **dopo la virgola prima che inizi il periodo**
- quante cifre ha il **periodo**

$$0,1\overline{6} = 0,1666 \dots$$

Prima del periodo c'è **1 cifra** (l'1). Moltiplico x per 10:

$$10x = 1,6666 \dots$$

Il periodo ha **1 cifra** (il 6). Moltiplico x per 100:

$$100x = 16,6666 \dots$$

Sottraggo il primo risultato dal secondo — il periodo si cancella:

$$100x - 10x = 16,6666 \dots - 1,6666 \dots = 15$$

$$90x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

$$0,8\overline{3} = 0,8333 \dots$$

Prima del periodo c'è **1 cifra** (l'8). Moltiplico x per 10:

$$10x = 8,3333 \dots$$

Il periodo ha **1 cifra** (il 3). Moltiplico x per 100:

$$100x = 83,3333 \dots$$

Sottraggo:

$$100x - 10x = 83,3333 \dots - 8,3333 \dots = 75$$

$$90x = 75 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}.$$

Esercizi — Capitolo 3: Le frazioni

Gli esercizi contrassegnati con sono **fortemente consigliati**.

1. ★ Calcola le espressioni; rispetta l'ordine delle operazioni.

- 1) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{9}{8}$
- 2) $(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}) \div \frac{7}{12}$
- 3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$
- 4) $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} - \frac{1}{6} \div \frac{5}{12}$
- 5) $\frac{5}{8} \div (\frac{3}{4} - \frac{1}{6}) + \frac{7}{12}$
- 6) $(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}) \times (\frac{5}{6} - \frac{1}{3})$
- 7) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} \div \frac{9}{16} + \frac{1}{6}$
- 8) $(\frac{4}{5} - \frac{3}{10}) \div (\frac{7}{15} + \frac{1}{5})$
- 9) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{15}{6} - 1$
- 10) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}) \div (\frac{3}{4} - \frac{1}{12})$
- 11) $\frac{3}{4} \times \frac{8}{15} \div \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
- 12) $[\frac{7}{8} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})] \times 12 + \frac{2}{3}$
- 13) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{9} \div \frac{8}{3} - \frac{1}{6}$
- 14) $(\frac{3}{7} + \frac{1}{14}) \div (\frac{5}{7} - \frac{3}{14}) \times \frac{2}{3}$
- 15) $1 - \frac{1}{2} \div (1 + \frac{1}{3}) + \frac{5}{12}$
- 16) $(\frac{2}{3})^2 - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + (\frac{1}{3})^2$

2. ★ Converti in frazione ridotta ai minimi termini.

- 1) 0,6 b) 0,75 c) 0,125 d) 0,4
- 2) $0,\overline{3}$ f) $0,\overline{6}$ g) $0,\overline{9}$ h) $0,\overline{27}$
- 3) $1,\overline{27}$ l) $0,\overline{16}$ m) $0,\overline{142857}$ n) $2,\overline{375}$
- 4) $0,8\overline{3}$ p) $1,3\overline{6}$ q) $0,41\overline{6}$ r) $3,\overline{285714}$

3. Trova x come frazione ridotta ai minimi termini.

- 1) $x + \frac{3}{8} = \frac{5}{6}$
- 2) $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{5}{9}$
- 3) $x \div \frac{7}{12} = \frac{3}{14}$
- 4) $\frac{3}{4} - x = \frac{1}{6}$

- 5) $\frac{5}{6} \cdot x - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$
 - 6) $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = \frac{8}{15}$
 - 7) $2x - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$
 - 8) $\frac{3x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{11}{12}$
 - 9) $\frac{x+1}{3} = \frac{x-1}{2}$
 - 10) $\frac{2x-1}{5} = \frac{x+2}{4}$
4. (*Problema — campi*) Un appezzamento di $\frac{5}{6}$ di ettaro viene diviso tra tre figli. Il primo riceve $\frac{1}{3}$ del totale, il secondo $\frac{2}{5}$.
 - 1) Superficie del terzo figlio in ettari e in m^2 .
 - 2) Quale figlio ha ricevuto la parte più grande?
 - 3) Se il terreno vale €3,50 al m^2 , quanto vale la quota di ciascun figlio?
 5. (*Problema — cisterna*) Una cisterna da 1 800 L è piena a $\frac{3}{4}$. Si aggiungono $\frac{1}{8}$ della capacità totale.
 - 1) Quanti litri contiene ora? Trabocca?
 - 2) Se invece di aggiungere si prelevano $\frac{1}{6}$ della capacità totale, quanti litri rimangono?
 - 3) La cisterna viene svuotata completamente con una pompa che aspira 45 L al minuto. Quanti minuti servono?
 6. (*Problema — ricetta*) Una ricetta per 6 persone usa: $\frac{3}{4}$ kg farina, $\frac{2}{3}$ L latte, $\frac{5}{8}$ kg zucchero, $\frac{3}{16}$ kg burro.
 - 1) Adatta le dosi per 10 persone (esprimi i risultati come frazioni esatte).
 - 2) Adatta le dosi per 4 persone.
 - 3) Se la farina costa €1,20 al kg, il latte €0,90 al L, lo zucchero €0,80 al kg, il burro €4,50 al kg, qual è il costo della ricetta originale per 6 persone?
 7. (*Problema — concimazione*) Un campo di $\frac{7}{4}$ ha richiede $\frac{3}{8}$ t di concime per ettaro. Ogni sacco pesa $\frac{1}{20}$ t.
 - 1) Quante tonnellate di concime in totale?
 - 2) Quanti sacchi interi servono?
 - 3) Quante t rimangono nel sacco non terminato?
 - 4) Se il concime costa €85 al sacco, costo totale (considerando i sacchi interi acquistati)?
 8. (*Problema — irrigazione*) Un canale A riempie una vasca in 3 ore, un canale B in 4 ore, un canale C in 6 ore.
 - 1) Che frazione riempie ciascuno in 1 ora?
 - 2) Con tutti e tre aperti, in quante ore si riempie la vasca?
 - 3) Se A è aperto per 1 ora e poi vengono aperti anche B e C, in quante ore totali si riempie?
 - 4) Se si apre solo B e C, in quante ore?
 9. (*Problema — percorso*) Un ciclista percorre $\frac{3}{8}$ del percorso in pianura, $\frac{5}{12}$ in salita e il

resto in discesa.

- 1) Che frazione del percorso è in discesa?
- 2) Se il percorso totale è 96 km, quanti km sono in salita?
- 3) In pianura va a $\frac{4}{3}$ della sua velocità media; in salita a $\frac{2}{3}$; in discesa a $\frac{5}{3}$. Se la velocità media è 24 km/h, calcola la velocità nelle tre sezioni.

Esercizi

1. ★ Calcola le frazioni complesse.

$$1) \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{\frac{7}{8} - \frac{1}{4}}$$

$$2) \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}} \div \frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{12}}$$

$$3) \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

2. Calcola le somme telescopiche.

$$1) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} \quad (\text{Usa: } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$2) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10}$$

3. Trova $x \in \mathbb{Q}$: $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{3}$.

Espressioni numeriche

5.1 Priorità delle operazioni

Ordine delle operazioni

- 1. Parentesi:** si risolve prima ciò che è dentro le parentesi, dall'interno verso l'esterno — prima le tonde $()$, poi le quadre $[]$, poi le graffe $\{\}$. All'interno di ogni coppia si rispetta lo stesso ordine (regole 2–4).
- 2. Potenze:** si calcolano dopo aver risolto le parentesi.
- 3. Moltiplicazioni e divisioni,** da sinistra a destra.
- 4. Addizioni e sottrazioni,** da sinistra a destra.

Potenze dentro le parentesi

Anche le potenze obbediscono all'ordine: quando si risolve l'interno di una parentesi, si calcolano prima le potenze che vi compaiono. Es. $(2 + 3^2) \times 4$: dentro la parentesi prima $3^2 = 9$, poi $2 + 9 = 11$, poi $\times 4 = 44$.

Espressione con tutti i livelli

$$\{[3^2 + (8 - 2 \times 3)] \times 4 - 6\} \div 5$$

Passo 1 — parentesi tonda: $8 - 2 \times 3 = 8 - 6 = 2$. **Passo 2 — potenza:** $3^2 = 9$. **Passo 3 — parentesi quadra:** $9 + 2 = 11$.

Passo 4 — graffa: $11 \times 4 - 6 = 38$. **Passo 5:** $38 \div 5 = \frac{38}{5}$.

Esercizi — Capitolo 4: Espressioni numeriche

Gli esercizi contrassegnati con sono **fortemente consigliati**.

1. ★ Calcola.

- 1) ★ $4 \times [3 + (12 \div 4)] - 2 \times 5$
- 2) ★ $(15 - 3 \times 4) + [2 \times (7 - 3) - 1]$
- 3) ★ $\{[(24 \div 3) - 2] \times 3 + 1\} \div 5$
- 4) ★ $100 - [5 \times (8 - 3) + 4 \times (6 - 2 \times 2)]$

- 5) ★ $\{[2 \times (3 + 1)^2 - 5] \times 3 - 1\} \div 11$
- 6) ★ $[(4^2 - 2 \times 3) \times (3^2 - 5) + 2] \div (10 - 8)$
- 7) ★ $\{[(2^3 + 1) \times 2 - 3] \div 5 + 4\} \times 3 - 10$
- 8) $\frac{2^5 \cdot 3^2 - (2^3 + 1)^2}{(3^3 - 2^4) \times 2 + 1}$
- 9) $\left[\frac{(5^2 - 3^2)}{2^3} \right]^2 \div \left[\frac{3^2 - 1}{2^2} \right]$
- 10) $\{3^3 - [2^4 + (3 \times 2^2 - 5)]\} \times 2^2$
- 11) $[(2^4 - 3^2) \times 5 + 2^3] \div [(7 - 3^2)^2 + 1]$
- 12) $(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}) \times (\frac{5}{6} - \frac{1}{4}) \div \frac{7}{24}$
- 13) $\{[(3^2 - 4) \times 2^3 + 5^2] \div [7^2 - 6^2]\}^2$
- 14) $\frac{(2^4 + 3^2) \times 5 - 7^2}{(2^3 - 3)^2 \div 4}$
- 15) $[3^3 - (2^2 + \frac{3}{4} \times 8)] \times (\frac{1}{3} + \frac{1}{6})$
- 16) $\{[5^2 - (3 + 2^2)] \times (2^3 - 3)\}^2 \div (5 \times 4 - 2^4)$

2. ★ Calcola le espressioni con frazioni.

- 1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$
- 2) $(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}) \times \frac{3}{5}$
- 3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$
- 4) $(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}) \div (\frac{5}{8} - \frac{1}{4}) + \frac{2}{3}$
- 5) $(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})^2 \div \frac{1}{36}$
- 6) $[\frac{7}{8} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})] \times 12 + \frac{2}{3}$
- 7) $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} \div \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$
- 8) $(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + 1$
- 9) $\frac{5}{6} - (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \div \frac{7}{12} + \frac{1}{2}$
- 10) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{6})^2 \times \frac{9}{25} \div (\frac{3}{5})^2$
- 11) $\frac{2}{3} \times [1 - \frac{1}{4} \div (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})]$
- 12) $(\frac{5}{4} - \frac{3}{8}) \div (\frac{7}{16} + \frac{1}{4}) \times (\frac{2}{3} + \frac{1}{6})$

3. (Problema — raccolta) In una fattoria si raccolgono 360 kg di olive in 5 giorni. Primo: 60 kg; secondo: il doppio del primo; terzo: 50 kg; quarto e quinto uguali.

- 1) Quanti kg si raccolgono il quarto giorno?
- 2) Scrivi l'espressione numerica completa.
- 3) Qual è la media giornaliera?
- 4) Se le olive vengono vendute a € 2,40 al kg, quanto si incassa?

4. (Problema — terreno) Un appezzamento di 1 260 m² è diviso in tre parti: la prima è $\frac{2}{7}$ del totale, la seconda $\frac{1}{3}$.

- 1) Area della terza parte.

- 2) Percentuale di ciascuna parte rispetto al totale.
- 3) Se la prima parte produce $\frac{3}{4}$ t di grano per ettaro, quanti kg produce? (1 ha = 10 000 m²)
5. ★ (*Problema*) Tre studenti raccolgono 240 campioni di terreno. Il primo raccoglie $\frac{1}{3}$ del totale, il secondo $\frac{5}{8}$ di quanto raccoglie il primo.
 - 1) Quanti campioni raccoglie ciascuno?
 - 2) Quanti ne raccoglie il terzo?
 - 3) Scrivi l'espressione completa con le frazioni e calcola.

Esercizi

1. ★ Calcola, lasciando il risultato come frazione ridotta se non è intero.
 - 1) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{27}{8} + \frac{1}{2}}$
 - 2) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)$
2. ★ (*Errori classici*) Identifica l'errore e scrivi il risultato corretto.
 - 1) « $3 + 4 \times 2 = 14$ perché $3 + 4 = 7$ e $7 \times 2 = 14$ »
 - 2) « $(-2)^4 = -16$ perché il segno negativo rimane»
 - 3) « $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ perché si sommano i denominatori»
3. Usando solo i numeri 1, 2, 3, 4 (ciascuno esattamente una volta) e $+$, $-$, $\times$, $\div$ con parentesi a piacere, costruisci un'espressione che vale 24.

Le potenze

6.1 Definizione e casi particolari

$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_n$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$ ($a \neq 0$); 0^0 non si considera (caso escluso).

Segno con base negativa: esponente pari $\Rightarrow$ positivo; dispari $\Rightarrow$ negativo. **Attenzione:** $(-3)^2 = +9$ ma $-3^2 = -9$.

Proprietà delle potenze

Proprietà	Formula	Esempio
Prodotto stessa base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
Quoziente stessa base	$a^m \div a^n = a^{m-n}$, con $m \geq n$, $a \neq 0$	$5^6 \div 5^2 = 5^4$
Potenza di potenza	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^4 = 3^8$
Prodotto stessa pot.	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$2^3 \cdot 3^3 = 6^3$
Quoziente stessa pot.	$a^n \div b^n = (a \div b)^n$, $b \neq 0$	$12^4 \div 3^4 = 4^4$

Esercizi — Capitolo 5: Le potenze

Gli esercizi contrassegnati con **sono fortemente consigliati**.

1. ★ Semplifica; il risultato deve essere una singola potenza o un numero.

1) $\frac{7^5 \cdot 7^2}{7^4 \cdot 7}$

2) $\frac{(2^3)^4}{2^5 \cdot 2^3}$

3) $\frac{3^6 \cdot 2^4}{6^4}$

4) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$

5) $\frac{12^3}{(4 \cdot 3)^2 \cdot 2}$

6) $\frac{5^4 \cdot 4^3}{10^4 \cdot 2}$

7) $\frac{6^2 \cdot 9}{4 \cdot 3^4}$

- 8) $\frac{(2^2 \cdot 3)^3}{6^2 \cdot 2^3}$
- 9) $\frac{15^4}{5^4 \cdot 3^3}$
- 10) $\frac{(2^3 \cdot 3^2)^2}{6^4}$
- 11) $\frac{(2 \cdot 3^2)^3}{(3 \cdot 2^2)^2}$
- 12) $\frac{4^5 \cdot 9^3}{6^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$
- 13) $\frac{(5^2 \cdot 2)^3}{10^4 \cdot 5^2}$
- 14) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{4}{9}\right)^2$
- 15) $\frac{3^{10} - 3^8}{3^8}$
- 16) $\frac{2^{12} + 2^{10}}{2^{10}}$

2. ★ Calcola le espressioni miste.

- 1) $2^3 + 3^2 - 4^1 + 1^{10}$
- 2) $[(-2)^3 + 3^2]^2 \div [5 - 2^2]$
- 3) $\frac{2^4 - 2^2}{2^2 + 2^0}$
- 4) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \frac{2^2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2$
- 5) $[2^4 - (3 + 1)^2]^3 \div [5^2 - 3^3]^2$
- 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1$
- 7) $2^{10} \div 4^4 \cdot 8^2$
- 8) $\frac{3^4 \cdot 2^3 - 5^2 \cdot 4}{(3^2 - 1)^2}$
- 9) $[(3^2 - 2^3) \times (2^2 + 1)^2] \div 5^2$
- 10) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$
- 11) $(2^5 - 4^2) \times (3^2 - 2^3)^2 + 5^0$
- 12) $[2^6 \div (4^2 - 2^3) + 3^2]^2 \div 5^2$
- 13) $\frac{(3^2 + 2^4) \cdot 5 - 11^2}{(2^4 - 5^2)^2} \cdot (1 + (-1)^{51})$
- 14) $2^3 \times \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}\right] \div \left(\frac{1}{2}\right)^3$

3. (Problema) Un campo quadrato ha lato $2^5 = 32$ m. Al centro una zona alberata quadrata di lato $2^3 = 8$ m.

- 1) Calcola le due aree usando le potenze.
- 2) Superficie coltivabile?
- 3) Quante volte è più grande il campo della zona alberata?
- 4) Se si aggiunge una seconda zona alberata di lato 2^2 m, quanto è la superficie coltivabile?

4. (Problema — batteri) Un batterio si riproduce raddoppiando ogni ora. Parte da 1 batterio alle 8:00.

- 1) Quanti batteri alle 14:00? Alle 20:00? Alle 8:00 del giorno dopo?
- 2) Esprimi ogni risposta come potenza di 2 e come numero.

- 3) Dopo quante ore ci sono più di 1 000 batteri?
- 4) Dopo quante ore ci sono più di 1 000 000 di batteri?
5. (*Problema — terremoti*) La scala Richter misura l'energia di un terremoto: ogni punto in più corrisponde a un'energia 10 volte maggiore.
 - 1) Un terremoto di magnitudo 5 quante volte è più energetico di uno di magnitudo 3?
 - 2) E uno di magnitudo 7 rispetto a uno di magnitudo 4?
 - 3) Esprimi il rapporto di energia tra magnitudo 8 e magnitudo 2 come potenza di 10.
6. (*Problema — interesse composto — anticipazione*) Un capitale di € 1 000 viene investito al 10% annuo composto (ogni anno il capitale aumenta del 10%, inclusi gli interessi precedenti).
 - 1) Scrivi il valore dopo n anni come espressione con potenza.
 - 2) Calcola il valore dopo 1, 2, 3 e 4 anni.
 - 3) Dopo quanti anni supera € 1 600?

Esercizi

1. Semplifica con esponente letterale.

$$1) \frac{3^{n+2} \cdot 3^n}{3^{2n+1}}$$

$$2) \frac{2^{2n} \cdot 4^n}{8^n}$$

$$3) \frac{3^{2n+1} - 3^{2n}}{3^{2n-1}}$$

$$2. \text{ Calcola: } \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{27}{8} + \frac{1}{2}}$$

3. Dimostra che $4^{10} > 10^6$ senza calcolatrice. (*Suggerimento:* mostra prima che $2^{10} = 1\,024 > 10^3$.)

4. (*Scacchiera*) Su 64 caselle si mette 1 chicco sulla prima, 2 sulla seconda, 4 sulla terza e così via. Totale chicchi come potenza di 2? Usando $2^{10} \approx 10^3$, stima l'ordine di grandezza.

Proporzioni e percentuali

7.1 Che cosa è una proporzione

Proporzione

Una **proporzione** è un'uguaglianza tra due rapporti:

$$a : b = c : d \quad (\text{si legge: "a sta a b come c sta a d"})$$

equivalentemente scritta $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. I numeri a e d si chiamano **estremi**; b e c si chiamano **medi**.

Proprietà fondamentale della proporzione

In una proporzione il **prodotto degli estremi** è uguale al **prodotto dei medi**:

$$a : b = c : d \iff a \cdot d = b \cdot c.$$

Questa proprietà permette di **trovare il termine mancante**: si mette x al posto del termine ignoto e si risolve $a \cdot d = b \cdot c$.

Trovare il termine mancante

$x : 6 = 10 : 15$. Prodotto degli estremi = prodotto dei medi: $x \cdot 15 = 6 \cdot 10 \Rightarrow x = \frac{60}{15} = 4$.

$3 : 5 = 12 : x$. $3 \cdot x = 5 \cdot 12 \Rightarrow x = \frac{60}{3} = 20$.

7.1.1 Proporzioni continue

Una **proporzione continua** ha la forma $a : b = b : c$, cioè il termine medio si ripete. In tal caso b si chiama **media proporzionale** tra a e c , e vale $b^2 = a \cdot c$.

Esempio

$$4 : b = b : 9 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6.$$

7.1.2 Proprietà derivate

Da $a : b = c : d$ si ricavano molte altre proporzioni equivalenti:

- **Invertendo i medi:** $a : c = b : d$.
- **Invertendo gli estremi:** $d : b = c : a$.
- **Invertendo tutto:** $b : a = d : c$.
- **Proprietà del comporre:** $(a + b) : b = (c + d) : d$.
- **Proprietà dello scomporre:** $(a - b) : b = (c - d) : d$.

7.2 Percentuali

La **percentuale** è un caso speciale di proporzione: indica quante parti su 100. Scrivere «il $p\%$ di A » significa:

$$\frac{p}{100} \times A = \frac{p \cdot A}{100}.$$

Tre problemi fondamentali:

1. **Trovare il valore:** quanto vale il $p\%$ di A ? $x = \frac{p}{100} \times A$.
2. **Trovare la base:** x è il $p\%$ di quale numero? $A = \frac{x \cdot 100}{p}$.
3. **Trovare la percentuale:** x è quale percentuale di A ? $p = \frac{x}{A} \times 100$.

Tre problemi su 200 kg

1. Il 15% di 200 kg: $\frac{15}{100} \times 200 = 30$ kg.
2. 30 kg è il 15% di quanto? $A = \frac{30 \times 100}{15} = 200$ kg.
3. 45 kg è quale percentuale di 200 kg? $p = \frac{45}{200} \times 100 = 22,5\%$.

Variazioni percentuali:

- **Aumento del $p\%$:** nuovo valore $= A \times \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.
- **Diminuzione del $p\%$:** nuovo valore $= A \times \left(1 - \frac{p}{100}\right)$.
- **Sconto e aumento IVA** sono applicazioni dirette di questi.

Esercizi — Capitolo 6: Proporzioni e percentuali

Gli esercizi contrassegnati con sono **fortemente consigliati**.

1. ★ Trova x nelle proporzioni più complesse.

- 1) ★ $2,4 : 3,6 = x : 5,4$
- 2) ★ $(x + 1) : 4 = (x - 1) : 2$
- 3) ★ $x : (x + 5) = 3 : 8$
- 4) ★ $(2x - 1) : (x + 3) = 1 : 2$
- 5) ★ $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = x : \frac{2}{3}$
- 6) $x^2 : 4 = 9 : x$ (proporzione continua)
- 7) $(3x + 1) : (2x - 1) = 7 : 4$
- 8) $x : (x + 6) = 2 : 5$
- 9) $\frac{x}{3} : \frac{x+1}{4} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$
- 10) $(x - 2)^2 : 9 = (x + 2) : 3$

2. (Problema — agrario) Un concime va diluito in acqua in rapporto 1 : 40.

- 1) Quanti L di acqua servono per 0,5 L di concime?
- 2) Quanti L di soluzione si ottengono?
- 3) Quanti mL di concime servono per preparare 4,1 L di soluzione?
- 4) Se il concime costa € 12,50 al litro, costo della dose per 40 L di soluzione?

3. (Problema — cartografia) Una cartina scala 1 : 25 000.

- 1) Una distanza di 8,4 cm sulla cartina: distanza reale in km?
- 2) Due paesi a 15 km di distanza: cm sulla cartina?
- 3) Un bosco occupa 6 cm² sulla cartina: area reale in ha?
- 4) Un percorso di 24 cm sulla cartina: quanti km a piedi (a 5 km/h)?

4. (Problema) Un produttore vende 120 kg di grano a € 108.

- 1) Prezzo al kg?
- 2) Costo di 85 kg?
- 3) Quanti kg si comprano con € 63?
- 4) Se il prezzo aumenta del 15%, nuovo prezzo per 100 kg?

5. (Problema — variazioni percentuali) Un appezzamento di 4 500 m² produce 1 350 kg di grano.

- 1) Produzione per ettaro?
- 2) L'anno dopo aumenta del 12%: quanti kg?
- 3) L'anno successivo cala del 12%: si ritorna alla produzione iniziale? Perché?
- 4) Quanti kg produce se aumenta del 20% e poi cala del 20%?

6. (Problema — sconto e IVA) Un trattore costa € 28 000.

- 1) Sconto del 8%: prezzo scontato?
- 2) Sul prezzo scontato si aggiunge IVA al 22%: prezzo finale?
- 3) Se invece lo sconto è del 12% e l'IVA è al 22%: prezzo finale?

- 4) Qual sconto percentuale rende il prezzo finale uguale a € 28 000?
7. (*Problema — fitofarmaci*) Una soluzione contiene il 2,5% di principio attivo.
- 1) Grammi di p.a. in 800 g di soluzione?
 - 2) Grammi di soluzione per avere 30 g di p.a.?
 - 3) Se si vuole abbassare la concentrazione all'1,5% aggiungendo acqua pura, quanta acqua aggiungere a 800 g di soluzione?
 - 4) Se si vuole alzarla al 4% evaporando acqua, quanta acqua si deve far evaporare da 800 g di soluzione?
8. Calcola variazioni percentuali successive.
- 1) Aumento 20% poi diminuzione 20%: prezzo finale di € 500?
 - 2) Due aumenti successivi del 10%: equivalente a quale aumento unico?
 - 3) Diminuzione 15% poi 10%: quale diminuzione unica equivalente?
 - 4) Aumento 30% poi diminuzione $p\%$: qual è p per tornare al prezzo iniziale?
9. (*Problema — pomodori*) Su 360 piante di pomodoro, il 15% è stato attaccato da una malattia. Di queste, il 40% è stato salvato con un trattamento.
- 1) Quante piante sono state attaccate?
 - 2) Quante sono state salvate?
 - 3) Quante sono andate perse?
 - 4) Percentuale del totale perduta?
 - 5) Se ogni pianta sana produce 3,5 kg, quale produzione totale?
10. (*Problema — interesse semplice*) Capitale € 3 500, tasso 4,5% annuo.
- 1) Interesse dopo 1 anno?
 - 2) Dopo 3 anni?
 - 3) Montante dopo 5 anni?
 - 4) In quanti anni il montante supera € 5 000?
11. Proporzioni continue: dividi i seguenti numeri in parti proporzionali.
- 1) 90 in parti proporzionali a 2 : 3 : 4
 - 2) 120 in parti proporzionali a 1 : 2 : 3
 - 3) 756 in parti proporzionali a 3 : 4 : 7
 - 4) 1 200 in parti proporzionali a 2 : 3 : 5 : 2

Esercizi

1. (*Miscuglio*) Due sostanze si mescolano in rapporto 3 : 7. Quanti grammi della prima ci sono in 350 g di miscuglio? Se aggiungo 50 g della prima, qual è il nuovo rapporto?
2. Il prezzo di un articolo aumenta del $p\%$ e poi diminuisce del $p\%$. Dimostra che il risultato finale è sempre inferiore al prezzo originale per $p > 0$. Di quale percentuale è inferiore? Calcola la perdita per $p = 10\%$ e $p = 20\%$.

3. (*Lega metallica*) Una lega di rame e zinco contiene il 65% di rame.
- 1) Quanti g di rame in 240 g di lega?
 - 2) Se aggiungo 60 g di rame puro, qual è la nuova percentuale?
 - 3) Quanti g di rame aggiungere per portarla al 75%?
4. Si mescolano 300 mL di soluzione al 40% con 200 mL al 10%. Qual è la concentrazione della miscela?

Proporzionalità diretta e inversa

8.1 Proporzionalità diretta

Grandezze direttamente proporzionali

Due grandezze x e y sono **direttamente proporzionali** se il loro **rapporto è costante**:

$$\frac{y}{x} = k \quad (k \neq 0 \text{ costante di proporzionalità})$$

equivalentemente: $y = kx$. Al raddoppiare di x raddoppia y ; al triplicare di x triplica y .

Come si riconosce: in una tabella di dati, se il rapporto y/x è sempre lo stesso, le grandezze sono direttamente proporzionali.

Grafico: una retta passante per l'origine di pendenza k .

Costo di acquisto

Un sacchetto di sementi costa €3,20 al kg. La tabella mostra il costo C in funzione della massa m :

m (kg)	1	2	5	10
C (€)	3,20	6,40	16,00	32,00

Il rapporto $C/m = 3,20$ è costante: $C = 3,20 m$.

8.2 Proporzionalità inversa

Grandezze inversamente proporzionali

Due grandezze x e y sono **inversamente proporzionali** se il loro **prodotto è costante**:

$$x \cdot y = k \quad \text{equivalentemente: } y = \frac{k}{x}.$$

Al raddoppiare di x si dimezza y ; al triplicare di x si divide y per 3.

Grafico: un'iperbole equilatera nel primo quadrante (se $k > 0$).

Tempo e velocità

Per percorrere 120 km: se la velocità è v km/h, il tempo è $t = 120/v$ ore.

v (km/h)	20	30	40	60
t (ore)	6	4	3	2

Il prodotto $v \cdot t = 120$ è costante.

8.3 Come distinguere i due tipi

Riconoscimento

	Diretta	Inversa
Regola	$y/x = k$ (costante)	$x \cdot y = k$ (costante)
Formula	$y = kx$	$y = k/x$
Se x raddoppia	y raddoppia	y si dimezza
Grafico	Retta per l'origine	Iperbole

8.4 La regola del tre semplice

La **regola del tre semplice** è un metodo pratico per risolvere problemi di proporzionalità. Si imposta una proporzione con tre valori noti e si trova il quarto.

Diretta: se y_1 corrisponde a x_1 e y_2 a x_2 , allora:

$$y_1 : x_1 = y_2 : x_2 \Rightarrow y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}.$$

Inversa: se y_1 corrisponde a x_1 e y_2 a x_2 , allora:

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1 \Rightarrow y_2 = \frac{y_1 \cdot x_1}{x_2}.$$

Regola del tre — diretta

5 kg di mele costano €3,75. Quanto costano 8 kg?

$$5 : 3,75 = 8 : x \Rightarrow x = \frac{3,75 \times 8}{5} = €6,00.$$

Regola del tre — inversa

4 operai costruiscono un muro in 6 giorni. In quanti giorni lo costruiscono 8 operai?
Più operai $\Rightarrow$ meno giorni: proporzionalità **inversa**.

Il prodotto operai $\times$ giorni è costante: $4 \times 6 = 8 \times x \Rightarrow x = \frac{4 \times 6}{8} = 3$ giorni.

Con la formula: $y_2 = \frac{y_1 \cdot x_1}{x_2} = \frac{6 \times 4}{8} = 3$.

8.5 La regola del tre composta

Quando ci sono **più grandezze**, si usa la **regola del tre composta**. Si tratta le grandezze una alla volta, applicando ogni volta la proporzione diretta o inversa secondo la relazione con la grandezza incognita.

Regola del tre composta

6 operai lavorano 8 ore al giorno e completano un lavoro in 12 giorni. Quanti giorni servono a 4 operai che lavorano 9 ore al giorno?

Imposto la proporzione tenendo conto delle relazioni:

- Operai e giorni: **inversa** (meno operai $\Rightarrow$ più giorni).
- Ore e giorni: **inversa** (più ore $\Rightarrow$ meno giorni).

$$x = 12 \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{9} = 12 \times \frac{48}{36} = 16 \text{ giorni.}$$

8.6 Il grafico cartesiano

Per rappresentare visivamente la relazione tra due grandezze si usa il **piano cartesiano**: un sistema di due rette perpendicolari (gli **assi**) che si incontrano nell'origine O . L'asse

orizzontale si chiama **asse delle x** (o delle ascisse); quello verticale **asse delle y** (o delle ordinate).

Ogni coppia di valori (x, y) corrisponde a un **punto** del piano: ci si sposta di x unità rispetto allo zero lungo l'asse orizzontale e di y unità rispetto allo zero lungo l'asse verticale. Per esempio, se $x = 3$ ci si sposta di 3 unità a destra; se $x = -2$ ci si sposta di 2 unità a sinistra. Analogamente, se $y = 4$ ci si sposta di 4 unità in su; se $y = -1$ ci si sposta di 1 unità in giù.

Come costruire un grafico passo per passo

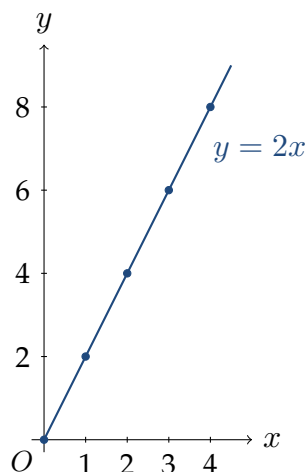
1. Scegli alcuni valori di x e calcola il valore corrispondente di y .
2. Riporta le coppie (x, y) in una tabella.
3. Disegna gli assi sul foglio a quadretti e scegli una scala adeguata.
4. Traccia ogni punto (x, y) sul piano.
5. Unisci i punti con una linea continua (retta o curva).

8.7 Grafico della proporzionalità diretta

Se $y = kx$, il grafico è una **retta passante per l'origine**. Maggiore è k , più la retta è ripida.

Grafico di $y = 2x$

x	$y = 2x$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8



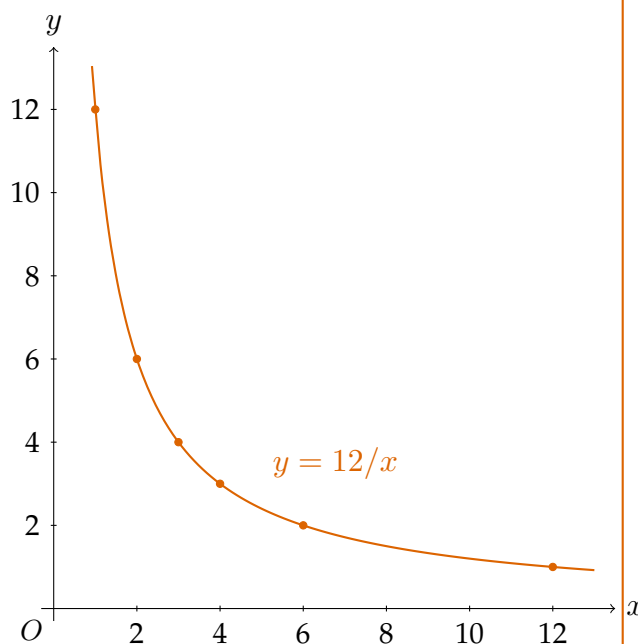
I punti sono allineati e la retta passa per l'origine.

8.8 Grafico della proporzionalità inversa

Se $y = k/x$, il grafico è un'**iperbole**: una curva che si avvicina agli assi senza mai toccarli. Quando x cresce, y diminuisce; quando x si avvicina a zero, y cresce sempre di più.

Grafico di $y = 12/x$

x	$y = 12/x$
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1



La curva non tocca mai gli assi e non passa per l'origine.

Differenza tra i due grafici

- **Diretta**: retta che *passa per l'origine*. Se $x = 0$ allora $y = 0$.
- **Inversa**: curva che *non tocca mai gli assi*. Se x raddoppia, y si dimezza.

Esercizi — Capitolo 7: Proporzionalità diretta e inversa

Gli esercizi contrassegnati con sono **fortemente consigliati**.

1. Verifica se le tabelle rappresentano proporzionalità diretta, inversa, o nessuna; indica la costante se applicabile.

1)

x	2	5	8	10
y	6	15	24	30

2)	x	3	4	6	12
	y	24	18	12	6
3)	x	1	2	4	8
	y	3	5	9	17
4)	x	2	4	5	10
	y	50	25	20	10
5)	x	1,5	3	4,5	6
	y	4,5	9	13,5	18
6)	x	6	8	12	24
	y	4	3	2	1

2. (*Problema — semina*) Per seminare 3,5 ha occorrono 14 kg di seme.
 - 1) Kg per 8 ha?
 - 2) Ha con 25 kg?
 - 3) Costo per 5 ha se 1 kg di seme costa € 2,30?
 - 4) Quanti kg per seminare un campo di 420 m × 280 m?
3. (*Problema — concimazione*) 120 kg di concime = 800 m².
 - 1) Concime per 2 200 m²?
 - 2) Area per 75 kg?
 - 3) Se il concime costa € 0,40 al kg, costo per 3 600 m²?
 - 4) Quanti sacchi da 25 kg servono per 1 ha?
4. (*Problema — irrigazione*) 6 ugelli irrigano un campo in 40 min.
 - 1) Tempo con 10 ugelli?
 - 2) Ugelli per finire in 15 min?
 - 3) Se ogni ugello eroga 12 L/min, portata totale con 6 ugelli?
 - 4) Volume d'acqua totale usato?
5. (*Problema — raccolta*) 8 stagionali raccolgono un campo in 5 giorni, lavorando 6 h/giorno.
 - 1) Giorni con 12 stagionali (stesse 6 h/giorno)?
 - 2) Giorni con 8 stagionali ma 9 h/giorno?
 - 3) Quante ore-uomo sono necessarie in totale?
 - 4) Con 5 stagionali e 8 h/giorno, quanti giorni?
6. (*Problema — miscela*) Due fertilizzanti A e B si mescolano in rapporto 3 : 5.
 - 1) Kg di A in 24 kg di miscela?
 - 2) Kg di B per 45 kg di miscela?

- 3) Se si aggiungono 10 kg di A, qual è il nuovo rapporto (approssimato)?
- 4) Quanto A e B servono per fare 200 kg di miscela?
7. Regola del tre composta.
- 1) 10 operai, 8 h/giorno, 15 giorni. Con 6 operai e 10 h/giorno: quanti giorni?
 - 2) 4 pompe svuotano 3 000 L in 5 h. Con 6 pompe: quante h per 4 500 L?
 - 3) 3 trattori arano 12 ha in 4 giorni (8 h/giorno). Con 5 trattori, 6 giorni, 6 h/-giorno: quanti ha?
 - 4) 5 operai producono 300 pezzi in 4 giorni (7 h/giorno). Con 7 operai e 8 h/-giorno: pezzi in 5 giorni?
 - 5) Una fontana ha 3 getti da 15 L/min e riempie una vasca in 4 h. Con 5 getti da 12 L/min: quante ore?
8. (*Problema — scala cartografica*) Su mappa scala 1 : 50 000:
- 1) Un bosco di 6 cm²: area reale in ha?
 - 2) Un sentiero di 14,6 cm: km reali?
 - 3) Un paese a 6,4 km: cm sulla mappa?
 - 4) Un lago di 2,4 ha: cm² sulla mappa?
9. (*Problema — consumo idrico*) Una pianta richiede 2,4 L di acqua ogni 3 giorni.
- 1) Fabbisogno di 35 piante per 7 giorni?
 - 2) In quanti giorni si consumano 100 L con 15 piante?
 - 3) Se la portata dell'impianto è 0,8 L/min, quanti minuti per irrigare 35 piante ogni 3 giorni?
10. (*Legge di Ohm*) $I = V/R$.
- 1) Con $V = 12\text{ V}$, $R = 4\ \Omega$: calcola I .
 - 2) V triplica, R raddoppia: come varia I ?
 - 3) $I = 0,5\text{ A}$, $V = 9\text{ V}$: trova R .
 - 4) Se $V = 220\text{ V}$ e $I = 5\text{ A}$: potenza $P = V \cdot I$?
11. (*Legge di Boyle*) $P \cdot V = k$.
- 1) $P_1 = 2\text{ atm}$, $V_1 = 3\text{ L}$: trova k .
 - 2) $V_2 = 2\text{ L}$: trova P_2 .
 - 3) P raddoppia: cosa succede a V ?
 - 4) $P_3 = 0,5\text{ atm}$: trova V_3 .

Esercizi

1. (*Legge di Ohm*) $I = V/R$. Con $V = 12\text{ V}$ e $R = 4\ \Omega$, calcola I . Se V triplica e R raddoppia, come varia I ?
2. (*Legge di Boyle*) Per un gas a temperatura costante $P \cdot V = k$. Con $P_1 = 2\text{ atm}$ e $V_1 = 3\text{ L}$, se il volume diventa 2 L, quale pressione P_2 si raggiunge? Se P raddoppia, cosa succede a V ?

3. (*Velocità media*) Un trattore percorre la prima metà di un tragitto a 20 km/h e la seconda metà a 30 km/h. Qual è la velocità media sull'intero tragitto? (*Attenzione: non è 25 km/h. Calcola i tempi separatamente.*)
4. (*Problema*) 10 operai completano un lavoro in 15 giorni lavorando 8 h/giorno. Quanti giorni servono a 6 operai che lavorano 10 h/giorno?
5. ★ Completa la tabella e traccia il grafico di $y = 3x$ su carta a quadretti. Indica la costante di proporzionalità e descrivi la forma del grafico.

x	0	1	2	3	4	5
$y = 3x$						

6. ★ Completa la tabella e traccia il grafico di $y = 24/x$ su carta a quadretti. Descrivi come cambia y quando x aumenta.

x	1	2	3	4	6	8
$y = 24/x$						

7. ★ La tabella seguente riporta i dati di un problema. Stabilisci se le grandezze sono in proporzionalità diretta, inversa, o nessuna delle due. Traccia il grafico.

x	2	4	6	8
y	15	7,5	5	3,75

8. ★ (*Problema — trattore*) Un trattore deve percorrere 60 km. La tabella mostra il tempo t in funzione della velocità v .
- 1) Completa la tabella: $v = 10, 20, 30, 60$ km/h.
 - 2) Traccia il grafico di t in funzione di v su carta a quadretti.
 - 3) Che tipo di proporzionalità è? Come si chiama la curva?
 - 4) Se la velocità raddoppia, il tempo come cambia?
9. (*Problema — produzione*) Una macchina produce $k = 120$ pezzi all'ora.
- 1) Scrivi la formula del numero di pezzi P prodotti in t ore.
 - 2) Completa: $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ore e traccia il grafico.
 - 3) Che tipo di grafico ottieni? Perché?
10. (*Problema — operai*) 12 operai completano un lavoro in 10 giorni.
- 1) Quanti giorni servono a 4, 6, 8, 12, 24 operai? Completa la tabella.
 - 2) Traccia il grafico: numero di operai sull'asse x , giorni sull'asse y .
 - 3) Che tipo di curva è? Il prodotto operai $\times$ giorni è sempre lo stesso?

Geometria elementare: rette, angoli, figure piane

9.1 Punti, rette e piani

La geometria studia le forme e le proprietà dello spazio. I suoi oggetti fondamentali non hanno una definizione in termini di cose più semplici: sono concetti primitivi, che descriviamo attraverso le loro proprietà.

Punto

Il **punto** è un'entità priva di dimensioni: non ha lunghezza, larghezza né spessore. Si indica con una lettera maiuscola: $A, B, P, \dots$

Retta

La **retta** è un insieme infinito di punti disposti in fila senza curvature, che si estende indefinitamente in entrambe le direzioni. Per due punti distinti passa *una e una sola* retta. Si indica con una lettera minuscola: $r, s, t, \dots$ oppure con due punti su di essa: $\overleftrightarrow{AB}$.

Due rette nel piano possono essere:

- **Incidenti**: si incontrano in un solo punto.
- **Parallele** ($r \parallel s$): non si incontrano mai; mantengono sempre la stessa distanza.
- **Coincidenti**: sono la stessa retta.

Semiretta e segmento

Fissato un punto O su una retta, la **semiretta** è la parte di retta da un lato di O (origine inclusa). Si estende all'infinito in una sola direzione.

Il **segmento** $\overline{AB}$ è la parte di retta compresa tra due punti A e B (estremi inclusi). Con AB (senza barra) si indica la sua **lunghezza**; con $\overline{AB}$ si indica il segmento come figura geometrica.

9.2 Gli angoli

Angolo

Un **angolo** è la figura formata da due semirette (i **lati**) con la stessa origine (il **vertice**). L'angolo misura l'*apertura* tra i due lati.

L'unità di misura più comune è il **grado sessagesimale** ($^{\circ}$). Un angolo giro misura 360° . Le principali categorie di angoli sono:

Classificazione degli angoli

Nome	Misura	Descrizione
Nulla	0°	I due lati coincidono, apertura zero.
Acuto	$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$	Più chiuso di un angolo retto.
Retto	90°	I lati sono perpendicolari ($\perp$).
Ottuso	$90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$	Tra retto e piatto.
Piatto	180°	I lati formano una retta.
Riflesso	$180^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$	Più aperto di un angolo piatto.
Giro	360°	Rotazione completa.

Angoli complementari: due angoli la cui somma è 90° .

Angoli supplementari: due angoli la cui somma è 180° .

Angoli esplementari: due angoli la cui somma è 360° .

Angoli opposti al vertice: formati da due rette incidenti; sono uguali a due a due.

Rette perpendicolari ($r \perp s$): due rette che si incontrano formando quattro angoli retti.

Angoli complementari e supplementari

$\alpha = 37^{\circ}$. Il complementare è $90^{\circ} - 37^{\circ} = 53^{\circ}$. Il supplementare è $180^{\circ} - 37^{\circ} = 143^{\circ}$.
Verifica: $37^{\circ} + 53^{\circ} = 90^{\circ}$ ✓; $37^{\circ} + 143^{\circ} = 180^{\circ}$ ✓.

9.3 Il perimetro

Il **perimetro** di una figura piana è la lunghezza del suo contorno, cioè la somma delle misure di tutti i lati.

Perimetri delle figure principali

Figura	Formula	Significato delle lettere
Triangolo qualsiasi	$P = a + b + c$	a, b, c : i tre lati
Triangolo equilatero	$P = 3l$	l : lato
Quadrato	$P = 4l$	l : lato
Rettangolo	$P = 2(b + h)$	b : base, h : altezza
Rombo	$P = 4l$	l : lato
Parallelogramma	$P = 2(b + l)$	b : base, l : lato obliquo
Pentagono regolare	$P = 5l$	l : lato
Esagono regolare	$P = 6l$	l : lato
Poligono regolare n lati	$P = n \cdot l$	n : numero lati, l : lato

9.4 L'area

L'**area** di una figura piana misura la superficie racchiusa dal suo contorno. L'unità fondamentale è il **metro quadrato** (m^2); si usano anche cm^2 , dm^2 , km^2 , ettaro ($1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$).

Aree delle figure principali

Figura	Formula	Significato delle lettere
Quadrato	$A = l^2$	l : lato
Rettangolo	$A = b \times h$	b : base, h : altezza
Parallelogramma	$A = b \times h$	b : base, h : altezza relativa
Triangolo	$A = \frac{b \times h}{2}$	b : base, h : altezza relativa
Rombo	$A = \frac{d_1 \times d_2}{2}$	d_1, d_2 : le due diagonali
Trapezio	$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$	B : base maggiore, b : base minore, h : altezza
Pentagono regolare	$A = \frac{P \times a}{2}$	P : perimetro, a : apotema
Esagono regolare	$A = \frac{P \times a}{2}$	P : perimetro, a : apotema

L'**apotema** di un poligono regolare è la distanza dal centro al lato (il raggio del cerchio inscritto). Per un esagono regolare di lato l : $a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$; per ora è sufficiente conoscere la

formula $A = \frac{P \cdot a}{2}$ e usare il valore dell'apotema se fornito.

Quadrato di lato 5 cm

$$P = 4 \times 5 = 20 \text{ cm.} \quad A = 5^2 = 25 \text{ cm}^2.$$

Rettangolo 8 cm $\times$ 3 cm

$$P = 2 \times (8 + 3) = 22 \text{ cm.} \quad A = 8 \times 3 = 24 \text{ cm}^2.$$

Triangolo con base 10 cm e altezza 6 cm, lati 8 e 7 cm

$$P = 10 + 8 + 7 = 25 \text{ cm.} \quad A = \frac{10 \times 6}{2} = 30 \text{ cm}^2.$$

Trapezio con $B = 12$ cm, $b = 8$ cm, $h = 5$ cm, lati obliqui 6 cm e 7 cm

$$P = 12 + 8 + 6 + 7 = 33 \text{ cm.} \quad A = \frac{(12 + 8) \times 5}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

Pentagono regolare di lato 4 cm e apotema 2,75 cm

$$P = 5 \times 4 = 20 \text{ cm.} \quad A = \frac{20 \times 2,75}{2} = \frac{55}{2} = 27,5 \text{ cm}^2.$$

Esagono regolare di lato 6 cm e apotema 5,2 cm

$$P = 6 \times 6 = 36 \text{ cm.} \quad A = \frac{36 \times 5,2}{2} = \frac{187,2}{2} = 93,6 \text{ cm}^2.$$

Altezza $\neq$ lato

L'altezza di un triangolo (o parallelogramma) è sempre *perpendicolare* alla base. Non coincide con il lato inclinato.

Nei triangoli **acutangoli** l'altezza cade all'interno del triangolo. Nei triangoli **ottusangoli** l'altezza relativa ai lati dell'angolo ottuso cade *fuori* dal triangolo: si prolunga la base e si abbassa la perpendicolare. In entrambi i casi la formula $A = \frac{b \times h}{2}$ rimane valida.

Esercizi — Capitolo 8: Geometria elementare

Gli esercizi contrassegnati con **sono fortemente consigliati**.

1. ★ Calcola perimetro e area del trapezio.

- 1) $B = 15$ cm, $b = 9$ cm, $h = 7$ cm, lati obliqui 8 e 9 cm.
- 2) $B = 20$ cm, $b = 12$ cm, $h = 6$ cm, lati obliqui 7 e 8 cm.
- 3) $B = 18$ m, $b = 10$ m, $h = 8$ m, lati obliqui 10 e 10 m.

- 4) $B = 25 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$, lati obliqui 13 e 13 cm.
- 5) $B = 30 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$, lati obliqui 10 e 10 cm.
2. Calcola perimetro e area del poligono regolare, dato il lato l e l'apotema a .
- 1) Pentagono: $l = 6 \text{ cm}$, $a = 4,13 \text{ cm}$.
 - 2) Pentagono: $l = 10 \text{ cm}$, $a = 6,88 \text{ cm}$.
 - 3) Esagono: $l = 8 \text{ cm}$, $a = 6,93 \text{ cm}$.
 - 4) Esagono: $l = 5 \text{ cm}$, $a = 4,33 \text{ cm}$.
 - 5) Pentagono: $l = 4 \text{ cm}$, $a = 2,75 \text{ cm}$.
 - 6) Esagono: $l = 12 \text{ cm}$, $a = 10,39 \text{ cm}$.
3. ★ (*Problema*) Un campo rettangolare misura $80 \text{ m} \times 45 \text{ m}$.
- 1) Quanti metri di recinzione servono per recintarlo?
 - 2) Qual è la superficie in m^2 e in are? ($1 \text{ ara} = 100 \text{ m}^2$)
 - 3) Se il filo per la recinzione costa € 2,40 al metro, qual è il costo totale?
 - 4) Se la semina costa € 0,18 al m^2 , quanto si spende per seminare il campo?
4. (*Problema*) Un appezzamento triangolare ha base 120 m e altezza 80 m. I tre lati misurano 120, 90 e 100 m.
- 1) Calcola perimetro e area.
 - 2) Quanta recinzione serve? Costo a € 3,50 al metro?
 - 3) Se la produzione è 4,5 t/ha di grano, quante tonnellate si raccolgono?
 - 4) Esprimi l'area in ettari e are.
5. (*Problema*) Una stanza rettangolare di $6 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ deve essere pavimentata con piastrelle quadrate di 30 cm di lato.
- 1) Area della stanza in m^2 e in cm^2 .
 - 2) Area di ogni piastrella in cm^2 .
 - 3) Quante piastrelle servono? (*Nota:* se il numero non è intero, arrotonda all'intero superiore.)
 - 4) Se ogni piastrella costa € 2,80, costo totale?
 - 5) Aggiungendo il 10% di scarto, quante piastrelle acquistare?
6. (*Problema*) Una figura è composta da un rettangolo $12 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ con sopra un triangolo di base 12 cm e altezza 5 cm.
- 1) Area totale della figura.
 - 2) Perimetro totale (i lati del triangolo sono 13 e 13 cm).
7. ★ Dato il perimetro, trova il lato o le dimensioni mancanti.
- 1) Quadrato con $P = 52 \text{ cm}$: lato?
 - 2) Rettangolo con $P = 36 \text{ cm}$ e base 12 cm: altezza?
 - 3) Triangolo equilatero con $P = 27 \text{ cm}$: lato?
 - 4) Pentagono regolare con $P = 45 \text{ cm}$: lato?
 - 5) Esagono regolare con $P = 72 \text{ cm}$: lato?

- 6) Rettangolo con $P = 50$ cm e $b = 2h$: trova b e h .
8. ★ Data l'area, trova la dimensione mancante.
- 1) Quadrato con $A = 196$ cm²: lato?
 - 2) Rettangolo con $A = 72$ cm² e base 9 cm: altezza?
 - 3) Triangolo con $A = 40$ cm² e base 10 cm: altezza?
 - 4) Rettangolo con $A = 90$ cm² e $b = 2h$: trova b e h .
 - 5) Parallelogramma con $A = 63$ cm² e $h = 7$ cm: base?
 - 6) Rombo con $A = 60$ cm² e $d_1 = 12$ cm: d_2 ?
9. (Problema — agrario) Un vigneto ha la forma di un trapezio con basi $B = 240$ m e $b = 160$ m, altezza $h = 90$ m. I lati obliqui misurano 92 e 95 m.
- 1) Perimetro del vigneto.
 - 2) Area in m² e in ettari.
 - 3) Se una vite occupa 4 m², quante viti ci sono?
 - 4) Se ogni vite produce mediamente 2,5 kg di uva, produzione totale?
 - 5) La recinzione costa € 4,20 al metro. Costo?
10. Vero o Falso? Giustifica con un esempio numerico o una spiegazione.
- 1) «Un rettangolo con perimetro 20 cm ha sempre area 25 cm².»
 - 2) «Se raddoppio il lato di un quadrato, l'area diventa il doppio.»
 - 3) «Due triangoli con la stessa base e la stessa altezza hanno la stessa area.»
 - 4) «Il perimetro di un rettangolo è sempre maggiore di quello del quadrato di uguale area.»
 - 5) «L'altezza di un triangolo non può essere maggiore del lato più lungo.»

Esercizi

1. Due rette si incontrano formando quattro angoli. Uno misura $(3x + 15)^\circ$ e l'angolo adiacente $(5x - 5)^\circ$. Trova x e le misure di tutti e quattro gli angoli.
2. (Figure equivalenti) Un rettangolo 15 cm $\times$ 8 cm e un triangolo di base 20 cm hanno la stessa area. Qual è l'altezza del triangolo?
3. (Recinto) Un allevatore ha 120 m di rete e appoggia un lato a un muro. Chiamo b la base parallela al muro. L'area è $A = b \cdot \frac{120-b}{2}$.
 - 1) Calcola A per $b = 20, 40, 60, 80, 100$ m.
 - 2) Per quale b l'area è massima?
4. Calcola l'area della figura «L»: rettangolo 10 cm $\times$ 8 cm da cui è stato tolto un angolo quadrato 4 cm $\times$ 4 cm.

Formulario di riferimento

Riepilogo formule principali

Argomento	Formula
MCD (fattorizzazione)	fattori comuni, esponente minore
mcm (fattorizzazione)	tutti i fattori, esponente maggiore
Relazione MCD-mcm	$\text{MCD}(a, b) \times \text{mcm}(a, b) = a \times b$
Frazioni equivalenti	$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$
Prodotto in croce	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$
Somma frazioni	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
Prodotto frazioni	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
Divisione frazioni	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$
Potenze (prodotto)	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Potenze (potenza)	$(a^m)^n = a^{mn}$
Proporzione	$a : b = c : d \iff ad = bc$
Media proporzionale	$a : b = b : c \Rightarrow b^2 = ac$
Percentuale	$p\% \text{ di } A = \frac{p}{100} \cdot A$
Aumento $p\%$	$A' = A \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
Diminuzione $p\%$	$A' = A \left(1 - \frac{p}{100}\right)$
Diretta	$y = kx, \quad y/x = k$
Inversa	$y = k/x, \quad xy = k$
Regola del tre (diretta)	$y_2 = y_1 \cdot x_2/x_1$
Regola del tre (inversa)	$y_2 = y_1 \cdot x_1/x_2$

Geometria elementare — riepilogo formule

Figura	Perimetro	Area
Quadrato (lato l)	$P = 4l$	$A = l^2$
Rettangolo ($b \times h$)	$P = 2(b + h)$	$A = b \cdot h$
Parallelogramma (b, h)	$P = 2(a + b)$	$A = b \cdot h$
Triangolo (b, h, lati)	$P = a + b + c$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Triangolo equilatero (lato l)	$P = 3l$	$A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$
Rombo ($l, \text{diag. } d_1, d_2$)	$P = 4l$	$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
Trapezio (B, b, h)	$P = B + b + l_1 + l_2$	$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$
Pentagono regolare (l, a)	$P = 5l$	$A = \frac{P \cdot a}{2}$
Esagono regolare (l, a)	$P = 6l$	$A = \frac{P \cdot a}{2}$
Poligono regolare n lati	$P = n \cdot l$	$A = \frac{P \cdot a}{2}$

Angoli: acuto $< 90^\circ$ retto $= 90^\circ$ ottuso $> 90^\circ$ piatto $= 180^\circ$ giro $= 360^\circ$

Complementari: somma $= 90^\circ$ Supplementari: somma $= 180^\circ$ Esplementari: somma $= 360^\circ$